

Hintereinanderausführung und subharmonische Funktionen

- a) Es seien B eine reelle $(n \times n)$ -Matrix, $c \in \mathbb{R}$, $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $Q(x) = Bx + c$ und $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie

$$\Delta(u \circ Q) = (L_0 u) \circ Q,$$

wobei

$$L_0 := \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}$$

ist und die a_{ik} die Elemente der Matrix $A := BB^T$ sind. Insbesondere ist also $\Delta(u \circ Q) = (\Delta u) \circ Q$, wenn B eine orthogonale Matrix ist.

- b) Sei $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte und konvexe Funktion. Ferner sei u harmonisch in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Die Funktionen $v := \phi \circ u$ und $w := |\nabla u|^2$ sind subharmonisch. in G